Ellipsoïde de John-Loewner

Leçons : 152, 158, 171, 203, 219, 2229 (, 253)

Réf. : FGN, Algèbre 3 3.37 p 229

Proposition :

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide.

Alors il existe un unique ellipsoïde centré en O de volume minimal contenant K.

1) Notations

. $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure d'ev euclidien usuelle.

. On note Q (resp. Q^+, resp. Q^{++}) l'ensble des formes quadratiques (resp. positives, resp. définies positives) sur $\mathbb{R}^n$

. Pour $q \in Q^+$, on note $\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n, \ q(x) \leq 1\}$

. Un ellipsoïde plein centré en O est un ensemble de la forme $\mathcal{E}_q$, où $q \in Q^{++}$.

2) Reformulation du problème

a) Volume d'un ellipsoïde centré en O :

Soit $q \in Q^{++}$.

On pose $V_q = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\mathcal{E}_q}(y) \, d\lambda(y) = \int_{\mathcal{E}_q} d\lambda(y)$ où λ = mes. de Lebesgue.

Soit $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$.

Par le théorème spectral, il existe $\mathcal{B}' = (f_1 \dots f_n)$ base orthonormale pour le produit scalaire euclidien et $a_1 \dots a_n > 0$ tels que :

si $P = \mathrm{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \in O_n(\mathbb{R})$, ${}^tPAP = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$

Rq : $\mathcal{B}'$ est orthogonale pour q et $q(f_i) = a_i$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ de coordonnées $(x_1 \dots x_n)$ dans $\mathcal{B}'$, alors $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$

- $\varphi_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

  $x \longmapsto y = {}^tP x$

  $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ d\varphi_1(x)(h) = {}^tP h$

  est un $\mathcal{C}^1$ - difféo. et $\quad \mathrm{Jac}\,\varphi_1(x) = \det({}^tP) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

  car ${}^tP \in O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$

On a donc $\quad V_q = \int_{\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \leq 1\}} dx_1 \dots dx_n$

- $\varphi_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

  $t = (t_1 \dots t_n) \longmapsto x = \left(\frac{t_1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{t_n}{\sqrt{a_n}}\right)$

  est un $\mathcal{C}^1$ - difféo. et $\quad \mathrm{Jac}\,\varphi_2(x) = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sqrt{a_n} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n} a_i}} \quad \forall t$

  soit $\boxed{\mathrm{Jac}\,\varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(q)}}}$

  donc $V_q = \int_{\|t\|^2 \leq 1} \frac{1}{\sqrt{\det(q)}}\, d\lambda(t)$

  $\boxed{V_q = \frac{V_0}{\sqrt{\det(q)}}}$ où V_0 = volume de $\bar{B}(0,1) \subset \mathbb{R}^n$

b/ Reformulation

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide.

On cherche donc $q \in Q^{++}$ tq $K \subset \mathcal{E}_q$ et V_q soit minimal

soit $q \in Q^{++}$ tq $K \subset \mathcal{E}_q$ et $\det(q)$ soit maximal

et on voudra m. qu'un tel q est unique.

On munit Q de la norme $N(q) = \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|$

et on pose $\mathcal{A} = \{q \in Q^+,\ K \subset \mathcal{E}_q\}$

$\boxed{\mathcal{A} = \{q \in Q^+,\ \forall x \in K\ \ q(x) \leq 1\}}$

3) Existence

Méthode : On m.q. $\mathcal{A}$ est compact et non vide dans Q, et on utilise la continuité du déterminant.

On montre également que $\mathcal{A}$ est convexe, ce qui servira pour l'unicité.

a°/ $\mathcal{A}$ convexe

Soient $q, q' \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in [0,1]$. Mq. $q'' = \lambda q + (1-\lambda) q' \in \mathcal{A}$.

. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q''(x) = \lambda q(x) + (1-\lambda) q'(x) \geq 0$ donc $q'' \in Q^+$

. $\forall x \in K$, $q''(x) = \lambda . q(x) + (1-\lambda) q'(x) \leq \lambda \times 1 + (1-\lambda) \times 1 = 1$

donc $q'' \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est convexe.

Rq : Q étant un ev de dim. finie, $\mathcal{A}$ compact $\iff$ $\mathcal{A}$ fermé borné

b°/ $\mathcal{A}$ fermé (dans Q)

Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ qui converge vers $q \in Q$ pour N.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

Alors $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq 1$ et $\left| q_n\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \leq N(q_n - q)$

donc $|q_n(x) - q(x)| \leq \underbrace{N(q_n - q)}_{n \to 0} \times \|x\|^2$

donc $q_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} q(x)$ dans $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q_n(x) \geq 0$ $\xrightarrow{n \to +\infty}$ donc $q(x) \geq 0$

$\forall x \in K$, $q_n(x) \leq 1$ $\xrightarrow{n \to +\infty}$ donc $q(x) \leq 1$

donc $q \in Q^+$ et $q \in \mathcal{A}$ d'où $\mathcal{A}$ est fermé dans Q.

c°/ $\mathcal{A}$ est non vide

K est compact donc borné donc il existe $M > 0$ tq $K \subset \overline{B}(0, M)$

Soit $\boxed{q_0(x) = \dfrac{\|x\|^2}{M^2}}$

Alors $q_0 \in Q^{++} \subset Q^+$ et $\forall x \in K$, $q_0(x) \leq 1$ donc $q_0 \in \mathcal{A}$

donc $\boxed{\mathcal{A} \text{ est non vide}}$

d°/ $\mathcal{A}$ est borné (pour N)

K est d'intérieur non vide, donc $\exists\, a \in K, r > 0$ tq $\overline{B}(a, r) \subset K$

. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tq $\|x\| \leq r$.

Alors $a + x \in \overline{B}(a, r) \subset K$.

Soit $q \in \mathcal{A}$. $q \in Q^+$ donc par l'inégalité de Minkowski,

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(a + x - a)} \leq \sqrt{q(a+x)} + \underbrace{\sqrt{q(-a)}}_{= q(a)} \leq 2$$

donc $\boxed{q(x) \leq 4}$

. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tq $\|x\| \leq 1$.

Alors $\|rx\| \leq r$ donc $q(rx) \leq 4$

$q(x) \leq \dfrac{4}{r^2}$ $\forall x$ tq $\|x\| \leq 1$

donc $N(q) \leq \dfrac{4}{r^2}$ $\forall q \in \mathcal{A}$ donc $\boxed{\mathcal{A} \text{ est borné}}$

e°/ Conclusion

$\det : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et $\mathcal{A} \subset Q$ est un compact non vide,
donc $\det$ est borné sur $\mathcal{A}$ et atteint ses bornes.

$\boxed{\exists\, q_K \in \mathcal{A} \text{ tq } \det(q_K) = \sup_{q \in \mathcal{A}} \det(q)}$

Enfin, $q_0 \in \mathcal{A}$ et $q_0 \in Q^{++}$ donc $\det(q_K) \geq \det(q_0) > 0$

donc $\boxed{q_K \in Q^{++}}$

4) Unicité

a/ **Lemme :** (convexité logarithmique) 3.31 p 222

Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \geq 0$ tq $\alpha + \beta = 1$.

Alors $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$

Par réd. simultanée, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ tq

$${}^tPAP = I_n \text{ et } {}^tPBP = D$$

$B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $D \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et les $\lambda_i > 0$.

++ **Rq:** $\forall x \in \mathbb{R}^n$, ${}^txBx > 0$ donc ${}^tx({}^tPBP)x = {}^t(Px)B(Px) > 0$

donc $\forall Y = Px \in \mathbb{R}^n$, ${}^tYDY > 0$.

Mais les λ_i n'ont aucune raison d'être les valeurs propres de B !

On a donc $\det(\alpha A + \beta B) = (\det P)^2 \det(\alpha I_n + \beta D)$

$$= (\det P)^2 \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta\lambda_i)$$

et $(\det(A))^\alpha (\det(B))^\beta = (\det P^2)^{\alpha+\beta} \times (\det I_n)^\alpha \times (\det D)^\beta$

$$= (\det P)^2 \times \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^\beta$$

(si un des $\lambda_i = 0$, c'est clair)

Par concavité du log, $\log(\alpha \cdot 1 + \beta\lambda_i) \geq \alpha \log 1 + \beta \log \lambda_i$

$$\log(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \beta \log \lambda_i = \log \lambda_i^\beta$$

$$\sum_{i=1}^n \log(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \sum_{i=1}^n \log \lambda_i^\beta$$

$$\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta\lambda_i) \geq \prod_{i=1}^n \lambda_i^\beta$$

$(\det(P))^2 > 0$

donc $\boxed{\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta}$

Si $A \neq B$, $\exists \lambda_{i_0} \neq 1$, donc si $\alpha \in]0,1[$, par stricte concavité du log, $\log(\alpha + \beta\lambda_{i_0}) > \beta \log \lambda_{i_0}$

donc $\boxed{\det(\alpha A + \beta B) > (\det A)^\alpha (\det B)^\beta}$

b°/ Unicité

Soit $q \neq q_K$ tq $q \in \mathcal{A}$ et $\det(q) = \det(q_K)$ (donc $q \in Q^{++}$)

Alors par convexité de $\mathcal{A}$, $\frac{1}{2}(q + q_K) \in \mathcal{A}$ et d'après le lemme précédent,

$$\det\left(\frac{1}{2}(q+q_K)\right) > \underbrace{(\det(q))^{1/2}(\det(q_K))^{1/2}}_{=} = \det(q_K)$$

absurde par maximalité de $\det(q_K)$.

Donc, $\boxed{q_K \text{ est unique}}$